

so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

konvergiert.

Hilfssatz mit $z_1 := t$ $\implies$ absolute Konver-

genz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

für alle $w \in \mathbb{C}$, $|w| < t (= |z_1 - z_0| !)$

Nach Wahl von t ist $w := z$ zulässig.

ii) weiterhin o.E. $z_0 = 0$; wäre
 die Reihe konvergent für ein $z^* \in \mathbb{C}$
 mit $\rho := |z^*| > R$ (o.E. $R < \infty$),
 so ergibt der Hilfssatz absolute Konvergenz

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$.

Speziell konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ für

$r \in (R, \rho)$, Widerspruch zur Def. von R !

□

Formel von Cauchy-Hadamard:

$$\begin{aligned} &\text{Konvergenzradius } R \text{ von } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \\ &= 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \end{aligned}$$

(mit der Interpretation $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$)

Beweis mit $\sqrt{\quad}$ - Kriterium:

$$\text{Setze } A_k := a_k \cdot (z-z_0)^k.$$

Dann gilt nach Satz 7.11 :

Wenn $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|A_k|} < 1$, ~~so folgt~~ $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| < \infty$. -240-

Nun ist $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|A_k|} =$

$$|z - z_0| \cdot \underbrace{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}_{=: \alpha}$$

Also: $\begin{cases} |z - z_0| < \alpha^{-1} \implies \\ \text{absolute Konvergenz von } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \end{cases}$

Daher ist $\boxed{R > \alpha^{-1}}$.

Wäre $R > \alpha^{-1}$, so ~~wähle~~ wähle man $r \in (\alpha^{-1}, R)$,

also $r \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$.

Dann ist

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{r^k |a_k|} > 1$$

Satz 7.11

$\implies$

Divergenzfall

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ divergiert}$$

Das widerspricht der Def. von R . $\square$

Bem:

Die Rechnungen zeigen, dass man auch

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum_{k=0}^{\infty} \underline{\underline{|a_k| r^k}} < \infty \right\}$$

hätte definieren können.

Oft bedient man sich einer Variante zur
Berechnung von R , die aus dem Quotienten
Kriterium folgt:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Konvergenzradius } R \text{ von } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \text{ falls} \\ \text{der Limes in } [0, \infty] \text{ existiert} \end{array} \right.$$

Beweis: $\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ existiere,

O.E. : $z_0 = 0$; mit k

$$A_k := a_k z^k$$

ist

$$\left| \frac{A_{k+1}}{A_k} \right| = |z| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \Rightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{k+1}}{A_k} \right| = \frac{|z|}{\alpha},$$

und für $|z| < \alpha$ liefert das

Quotientenkriterium absolute Konvergenz von ⁻²⁴³⁻

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$\Rightarrow \boxed{R > \alpha}$$

Annahme : $R > \alpha$

Def. von $R \Rightarrow \exists r \in (\alpha, R)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ konvergiert } (*)$$

aber : $\left| \frac{a_{k+1} \cdot r^{k+1}}{a_k \cdot r^k} \right| = r \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow r/\alpha$

und $\boxed{r/\alpha > 1}$; nach dem "Divergenzteil"

des Quotientenkriteriums ergibt sich ein

Wspr. zu $(*)$.



Beispiele

-244-

$$\textcircled{1} \quad E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad \boxed{a_k := \frac{1}{k!}}$$

$$a_k / a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \infty}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k! z^k, \quad \boxed{a_k = k!}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 0}$$

$$\textcircled{3} \quad \boxed{L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} z^n}$$

mit $a_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ folgt

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{k+1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

Wir schließen mit

Satz 7.15 : Identitätssatz für Potenzreihen

Seien $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$

und $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$

konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \rho$
für ein $\rho > 0$. Gibt es dann eine Folge

$z_n \rightarrow z_0$ mit $f(z_n) = g(z_n)$ für

alle n , so gilt:

$$a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

also $f = g$ auf $\{z : |z-z_0| < \rho\}$.

Bew: Skript p. 101/102



§8 Spezielle Funktionen

-a-

Übersicht:

I.

~~allgemeine Exponentialfunktion~~
 ~~$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$~~
~~mit Basis $a > 0$,~~

allgemeine Exponential-
funktion
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$
mit Basis $a > 0$,

allg. Potenzfunktion

$\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^\alpha$ mit Exponent $\alpha \in \mathbb{R}$

II. Exponential- und Logarithmusfunktion (reell)
zur Basis e

III. Exponentialfunktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : "e^z"$

IV. trigonometrische Funktionen auf $\mathbb{C}$
und $\mathbb{R}$, Def. von π

V. Hyperbelfunktionen

Hilfsmittel:

A.) (z.B. bei I. & II): Fortsetzung
der Funktion von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ durch

Grenzübergang $\leadsto$ Stetigkeitsargument

-b-

B.) (z.B. bei III & IV):

- Konvergenzverhalten von Potenzreihen
- Cauchy Produktsatz (für $e^{z+w} = e^z e^w$)

Anmerkung: Viele Beweise gehen später mit Differentialrechnung schneller, deshalb manchmal nur eine Idee.

Details: Skript ∇

Zur Umsetzung von A.) ist das folgende Konzept äußerst nützlich

[starke Variante der Stetigkeit]

§8 Spezielle Funktionen

-246-

..... $\exp, \log, \sin, \cos$

Nützlich ist folgende (starke!) Variante der Stetigkeit.

Def. 8.1 : (Lipschitz Stetigkeit)

Sei $A \subset \mathbb{C}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{C}$.

f Lipschitz stetig auf A : $\Leftrightarrow$

$$\exists L \gg 0: \boxed{\begin{array}{l} |f(z_1) - f(z_2)| \leq L \cdot |z_1 - z_2| \\ \forall z_1, z_2 \in A \end{array}}$$

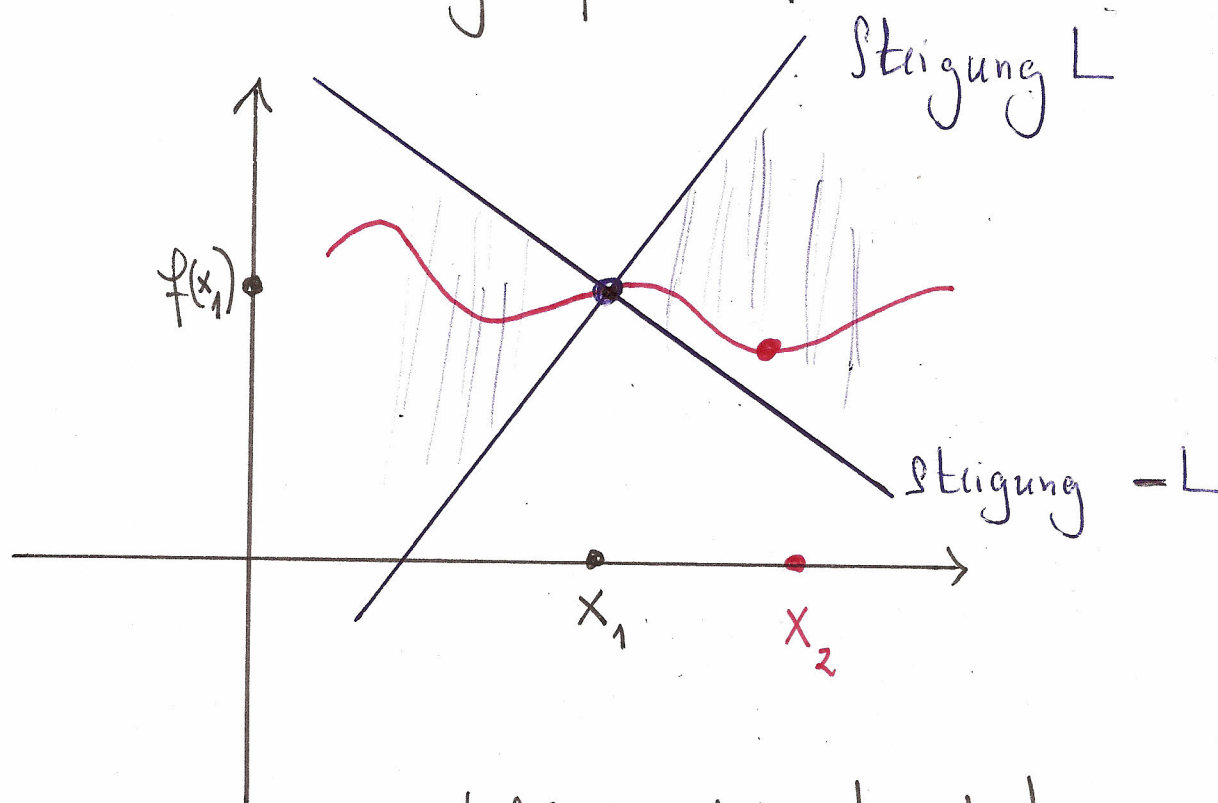
Bem: ① L heißt eine Lipschitz -
Konstante für f auf A .

② „dehnungsbeschränkt“ statt Lipschitz

③ Definitionsbereich A :

meistens eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ oder
ein Intervall in $\mathbb{R}$; oft auch $A \subset \mathbb{Q}$!

④ Vorstellung für $\varphi: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$:



$$\| \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \| \leq L \| x_1 - x_2 \|$$

fixiere $(x_1, \varphi(x_1))$ beliebig $\implies \text{Graph}(\varphi)$
muss im schraffierten Bereich bleiben

⑤

offenbar:

$$\boxed{\begin{aligned} z_n \rightarrow z \text{ in } A &\implies \\ f(z_n) &\rightarrow f(z) \end{aligned}}$$

("Stetigkeit")

-248-

Beispiele:

1.) Potenzreihenfunktionen (s. Übung!)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ habe} \\ \text{Konvergenzradius } R > 0 \implies \\ f \text{ Lipschitz auf } A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \\ \text{für } \boxed{r < R.} \end{array} \right.$$

Bew: Fixiere $r < R$, wähle $z, w \in A$

$$\implies |f(z) - f(w)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - w^n) \right| =$$

$$= \left| \sum_{h=1}^{\infty} a_n (z-w) \left\{ z^{n-1} + z^{n-2} w + \dots + z w^{n-2} + w^{n-1} \right\} \right|$$

$$\leq |z-w| \sum_{h=1}^{\infty} \underbrace{|a_n| \cdot n r^{n-1}}_{=: \alpha_n}$$

Wieso konvergiert die Reihe rechts?

Konvergenzradius R von $f =$

$$\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \quad (*)$$

Also: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} =$

$$\underline{r} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \underline{r}/R < 1$$

$$L := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < \infty.$$



Wurzelkriterium



2.) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \sqrt{x}$
nicht Lipschitz (Übung) auf $[0, 1]$

3.) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x},$
 Lipschitz, falls $0 < a < b.$

Beweis: $|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| =$

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

gilt für alle $x, y > 0 \implies$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

(Man sieht: $L = \frac{1}{2\sqrt{a}} \rightarrow \infty$, wenn
 a näher an 0 rückt)

Wir benötigen später noch

-251-

Satz 8.1: (Zwischenwerteigenschaft von reellen Lipschitz Funktionen)
← "ZWE"

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz, so
kommt jede Zahl c zwischen $f(a)$
und $f(b)$ als Funktionswert vor.

(gilt allgemein für stetige $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$)

Beweis: O.E. $f(a) < f(b)$; zu $c \in (f(a), f(b))$ setze

$$M := \{ x \in [a, b] : f(x) > c \} \quad (\neq \emptyset)$$

sowie $x_0 := \inf M$. In M gibt es

eine Folge (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$.

Lipschitz - Bedingung $\implies f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Zeige: $f(x_0) = c$ (Details später in §9)

□

Bem: 1.) $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

hat die ZWE nicht.

2.) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) :=$

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\pm n) = \pm \infty$

Speziell: $f(-n) < 0 < f(n)$, falls n groß

Satz 8.1 $\Rightarrow \exists x \in [-n, n]: f(x) = 0$

Allgemein:

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom ungeraden Grades, so hat f eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

reelle

-253-

I. Potenz - und Exponentialfunktionen:

bis jetzt: x^r für $x \in \mathbb{R}, x > 0$ (Basis)

und $r \in \mathbb{Q}$ (rationale Exponenten)

Frage: Exponenten $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$?

Idee: rationale Approximation!

$$x^r := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}, \text{ falls } r_n \rightarrow r,$$

$$r_n \in \mathbb{Q}$$

(rationale Lipschitz Bedg)

Hilfssatz: Sei $x \in \mathbb{R}^+$ und $m \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es ein $L = L(m) > 0$ mit

$$|x^r - x^s| \leq L |r - s| \quad \forall r, s \in \mathbb{Q} \cap [-m, m]$$

Beweisskizze:

$$\textcircled{1} \text{ Zeige vorab: } \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}, \quad y > 1, \quad t \in \mathbb{Q}^+ \implies \\ y^t - 1 < y^{t+1} \cdot t \end{array} \right\}$$

Fall

$$t \geq 1: \quad y^t - 1 < y^t \leq y \cdot y \leq y^t \cdot y \cdot t = t y^{t+1}$$

Fall

$$0 < t < 1: \text{ dann } t = \frac{p}{n}, \quad p < n, \quad n, p \in \mathbb{N}$$

$$\implies y^t = y^{p/n} = \sqrt[n]{y^p} =$$

$$\sqrt[n]{\underbrace{y \cdots y}_{p \text{ fach}} \underbrace{1 \cdots 1}_{n-p \text{ fach}}}$$

AMG-Ungleichung

$$\leq \frac{1}{n} (y + \dots + y + 1 + \dots + 1)$$

$$= \frac{1}{n} (py + n-p)$$

$$= t y + 1 - t$$

$$\Rightarrow y^{t-1} \leq t(y-1)$$

offenbar wegen $y > 1$: $y^{-1} \leq y^{t+1}$

$\Rightarrow$ Beh.

zunächst
 ② Sei $x > 1$, o. E. $r < \rho$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x^{\rho-r} - 1 \leq x^{\rho-r+1} \cdot (\rho-r)$$



$$t := \rho - r$$

Multiplikation mit $x^r \implies$

$$x^p - x^r \leq x^{p+1} (p-r)$$

Gemäß Vor. ist $r, p \in [-m, m] \implies$

$$x^p - x^r \leq \sqrt[m]{x^{m+1}} (p-r) \implies$$

$L = \sqrt[m]{x^{m+1}}$ reicht als Schranke

③ Sei $x \in (0, 1)$. Betrachte ② für $1/x$

□

Damit folgt:

Satz und Def. 8.2:

1.) Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Ist $x \in \mathbb{R}$ und

(x_n) eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit

-256-

$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, so existiert

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$$

und hängt nicht von der Wahl der speziellen Folge ab.

$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ heißt Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$

2.) Es gelten die

Potenzgesetze :

$(a > 0, b > 0,$

$x, y \in \mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{x+y} = a^x a^y, \\ (ab)^x = a^x b^x, \\ (a^x)^y = a^{xy}, \\ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \end{array} \right.$$

3.) $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ ist Lipschitz
auf Kompakten Intervallen in $\mathbb{R}$.

Beweis: 1.) Aus $x_n \rightarrow x$ folgt mit
dem Hilfssatz (wähle "L" passend!)

$$|a^{x_n} - a^{x_k}| \leq L |x_n - x_k| \implies$$

(a^{x_n}) Cauchy Folge;

gilt $\tilde{x}_n \rightarrow x$ mit $\tilde{x}_n \in \mathbb{Q}$, so ist

$$|a^{x_n} - a^{\tilde{x}_n}| \leq L |x_n - \tilde{x}_n| \rightarrow 0$$

2), 3.) : ebenfalls durch Approximation;
bei 3.) benutze den Hilfssatz □

Bem : Die Funktion

$$\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$$

heißt Potenzfunktion mit Exponent $\alpha \in \mathbb{R}$.

Man zeige ^{ebenfalls} durch rationale Approximation:

Satz 8.3 : (Monotonieverhalten)

- 1.) $a > 1$: $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto a^x$ streng wachsend
- 2.) $0 < a < 1$: $-||-$ fallend
- 3.) $\alpha > 0$: $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^\alpha$ streng wachsend
- 4.) $\alpha < 0$: $-||-$ fallend

5.) Die Potenzfunktion $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist Lipschitz auf allen Intervallen $[A, B]$ mit $A > 0$.

Bem: 1) - 4) später schneller mit Differentialrechnung! ∇

5.) ist aufwendig, vgl. Skript p. 110/111: man betrachte zunächst $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, schreibt $\alpha = n/m$, benutzt Bernoulli

.....